

DOI: 10.16285/j.rsm.2018.2213

无黏性土压缩模型及其验证

王 龙^{1,2}, 朱俊高^{1,2}, 郭万里³, 陆阳洋^{1,2}

(1. 河海大学 岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学 江苏省岩土工程技术工程研究中心, 江苏 南京 210098;
3. 南京水利科学研究院 岩土工程研究所, 江苏 南京 210024)

摘 要: 土体本构模型的建立往往需要以等向压缩模型为基础。通过对无黏性土等向压缩特性的分析, 发现无黏性土等向压缩状态下压缩指数的大小与当前孔隙比和球应力密切相关, 进而提出了以当前孔隙比和球应力为变量的可分离函数表示的压缩指数表达式。在此基础上得到一个可以描述无黏性土压缩特性的三参数压缩模型。与试验数据的对比表明, 该模型能够较好地拟合不同初始孔隙比下无黏性土等向压缩试验的孔隙比-应力关系。与以极限压缩曲线为参考线建立的压缩模型相比, 在拟合低应力区无黏性土的孔隙比-应力关系时, 提出的新模型更具有实用性。新模型也可对无黏性土建立本构模型提供基础。

关 键 词: 无黏性土; 压缩模型; 孔隙比; 应力

中图分类号: TU 411

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2020) 01-0229-06

Compression model for cohesionless soils and its verification

WANG Long^{1,2}, ZHU Jun-gao^{1,2}, GUO Wan-li³, LU Yang-yang^{1,2}

(1. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China;

2. Jiangsu Research Center for Geotechnical Engineering Technology, Hohai University, Nanjing, Jiangsu, 210098, China;

3. Geotechnical Engineering Department, Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing, Jiangsu 210024, China)

Abstract: The establishment of soil constitutive model is often grounded on the isotropic compression model. Based on the analysis of the isotropic compression characteristics of the cohesionless soils, it is found that the value of the compression index is closely related to the current void ratio and spherical stress. On this basis, an expression of the compression index formulated as a separable function of the current void ratio and spherical stress is established. Then, a three-parameter compression model that describes the compression characteristics of the cohesionless soils is obtained. The comparisons with test data of four types of sands show that the model can properly fit the relationships between void ratios and stress of cohesionless soils with different initial void ratios. Compared with the compression models established by taking the limit compression curve as the reference line, the proposed model is more useful in fitting the relationships between void ratios and stresses of cohesionless soils in low-stress regions. The model also provides a foundation for establishing constitutive models of cohesionless soil.

Keywords: cohesionless soil; compression model; void ratio; stress

1 引 言

土体的弹塑性或弹-黏塑性本构模型大部分是在土体的等向压缩模型的基础上构建的^[1-5]。对于正常固结黏土, 其等向压缩曲线(下文简称压缩曲线)在孔隙比 e 和球应力 p 的对数空间坐标系中为一条

直线(简称 NCL)。由于 NCL 易于拟合, 简单实用, 因此被广泛用于黏土的本构模型中。

大量的试验数据和数值分析结果表明^[6-8], 与黏土不同, 无黏性土的压缩曲线在 $e-\ln p$ 空间内并不是一条直线, 而是一条曲线。不仅如此, 无黏性土的压缩曲线还受初始孔隙比的影响, 只有达到相应

收稿日期: 2018-12-05

修回日期: 2019-05-24

基金项目: 国家重点研发计划项目 (No.2018YFC1508505); 江苏省研究生科研与实践创新计划项目 (No.KYCX18_0563); 中央高校基本科研业务费专项资金资助 (No.2018B662X14); 国家自然科学基金 (No.U1865104, No.51479052)。

This work was supported by the National Key R&D Program of China (2018YFC1508505), the Postgraduate Research & Practice Innovation Program of Jiangsu Province (KYCX18_0563), the Fundamental Research Funds for the Central Universities (2018B662X14) and the National Natural Science Foundation of China (U1865104, 51479052).

第一作者简介: 王龙, 男, 1991 年生, 博士研究生, 主要从事土体基本性质及本构理论研究。E-mail: hohaiwl@163.com

通讯作者: 朱俊高, 男, 1964 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事土体基本性质及本构关系、土石坝工程研究。E-mail: zhujungao@hhu.edu.cn

的破碎应力 ($e-\ln p$ 空间压缩曲线的转折点) 后, 不同初始孔隙比下的压缩曲线才趋于一条稳定的曲线。Pestana 等^[9]将这条曲线命名为极限压缩曲线 (LCC)。

为了描述无黏性土的压缩特性, 许多学者提出了不同的压缩模型。就笔者所知, 这些压缩模型大致可分为两类。第 1 类压缩模型建立时以极限压缩曲线 (LCC) 作为参考线^[9-11], 这样可保证无黏性土不同初始孔隙比下的压缩曲线在高应力区汇聚于 LCC。正因如此, 此类模型在使用时要求试验数据包含 LCC 段。Sacramento River 砂^[6]和 Cambria 砂^[12]的等向压缩试验数据表明, 砂土达到极限压缩状态所需的球应力 p 高达几十兆帕。对目前常用的三轴压缩仪来说, 要进行围压如此高的试验十分困难。另外, 这类模型常需要借助数值分析等手段获得无黏性土的压缩曲线, 难以被一般工程人员所理解和掌握。因此, 尽管这类模型有明确的收敛极限, 但实用性却受到了较大的限制。

相比于第 1 类压缩模型, 第 2 类则是在对无黏性土的试验结果的基础上总结和扩展得到的。这类方程的优点是简单实用。如 Bauer^[13]总结大量试验结果得到的压缩方程仅含有两个参数, 却可以很好地描述无黏性土的压缩特性, 因此被广泛采用^[2, 14]。赵颜辉等^[15]提出的压缩模型的参数仅通过低压下的 3 组等向压缩试验就可以简单确定。与第 1 类压缩模型相比, 此类模型往往没有明确的收敛极限, 但较为实用。

实际工程中, 一般情况下土体所受固结应力很难超过 10 MPa^[15], 因此研究第 1 类压缩模型虽然具有科研价值, 但是实用性不强。此外, 如上文所述, 第 1 类压缩模型在使用时存在一定限制。因此, 综合考虑上述两方面内容, 本文提出了一个可以准确反映低球应力 (本文低球应力的取值范围为小于 20 MPa) 时无黏性土压缩特性的第 2 类压缩模型, 并通过不同无黏性土的等向压缩试验数据对压缩模型进行验证。

2 压缩模型的提出

图 1 整理了 $e-\ln p$ 空间内典型的两种无黏性土 Sacramento River 砂^[6]和 Cambria 砂^[12]的等向压缩试验数据 (球应力 < 20 MPa)。土力学中使用压缩指数 C_c ($C_c = -de/d(\ln p)$, 如不做特殊说明, 本文均采用此定义) 来描述土体的压缩性。按照此定义, 由图 1 可见, 当球应力 p 小于破碎应力时, 无黏性土压缩性低, 此时土体的变形主要以颗粒的错动、滑移为

主。当球应力 p 增大直至超过对应的破碎应力后, 土颗粒开始发生破碎, 压缩指数 C_c 逐渐增大, 不同初始孔隙比下的压缩曲线逐渐汇聚成 LCC。此时的变形主要以颗粒破碎以及破碎后颗粒重排列为, 且压缩变形不再受初始孔隙比的影响。

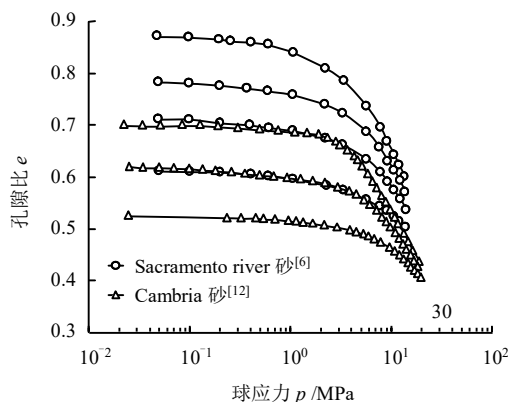


图 1 无黏性土的典型压缩曲线

Fig.1 Typical compression curves of cohesionless soils

图 2 给出了图 1 中 Sacramento River 砂的压缩指数 C_c ($C_c = -\Delta e / \Delta \ln p$) 与球应力 p 在 $C_c-\ln p$ 空间内的关系曲线。一方面, 由于 Cambria 砂的 C_c-p 关系图和 Sacramento River 砂的部分重合, 影响读者阅读; 另一方面, 两种砂土的 C_c-p 关系相似, 因此图 2 未给出 Cambria 砂的 C_c-p 关系图。从图 2 中可以看出, 无黏性土的压缩指数 C_c 随球应力 p 的增加而呈非线性地增加。为此, 笔者尝试用幂函数对试验点进行拟合, 发现拟合曲线与试验点吻合很好。图 2 则给出了 Sacramento River 砂 4 个初始孔隙比下的试验 C_c-p 关系的拟合曲线。

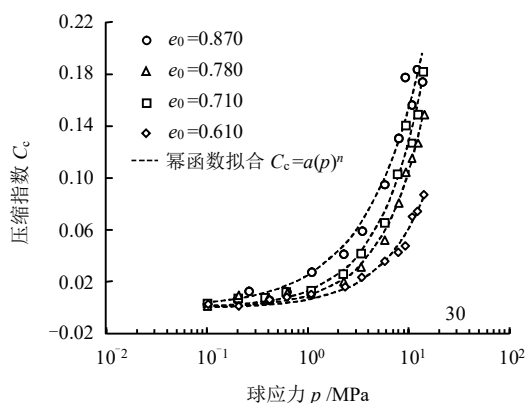


图 2 Sacramento River 砂等向压缩试验 C_c-p 关系曲线

Fig.2 C_c-p relationship curves of Sacramento River sand under isotropic compression tests

值得注意的是, 在无黏性土的压缩指数 C_c 随球

应力 p 的增大而增大的过程中 (图 2), 土体的孔隙比是不断减小的。一般来说, 孔隙比 e 越大, 土颗粒越容易重排列, 压缩指数 C_c 也就越大, 这一点在图 2 中有明显体现: 初始孔隙比大的试样的 C_c 在相同球应力下大于初始孔隙比小的试样。此外, 这一点在无黏性土的加载—卸载—再加载过程中亦有体现: 在相同应力范围内, 无黏性土再加载段的孔隙比变化明显小于初始加载段的孔隙比变化^[16]。因此, 可以认为无黏性土的 C_c 不仅与球应力 p 呈正相关关系, 还与当前的孔隙比 e 呈正相关关系。

综上所述, 本文提出采用球应力和当前孔隙比共同描述压缩指数。为了获得压缩指数的定量描述, 本文做出如下两个假设:

(1) 压缩指数 C_c 与仅与当前孔隙比 e 有关的函数 f_1 和仅与球应力 p 有关的函数 f_2 的乘积成正比, 即

$$C_c = \alpha f_1(e) \cdot f_2\left(\frac{p}{p_a}\right) \quad (1)$$

式中: α 为比例系数; p_a 为大气压强, 作用是使 p 化为无量纲。

(2) 函数 f_1 可以表示为

$$f_1(e) = e \quad (2)$$

至于函数 f_2 的表达式, 图 2 表明压缩指数和球应力的关系可近似用幂函数表示, 且 Ovalle^[17] 也使用幂函数来表示压缩指数和球应力的关系。因此, 本文采用下式表示函数 f_2 :

$$f_2\left(\frac{p}{p_a}\right) = \left(\frac{p}{p_a}\right)^n \quad (3)$$

式中: n 为材料参数, 对于同一级配的无黏性土 n 为一常数。

综合式 (2)、(3), 式 (1) 可以表示为

$$C_c = \alpha e \left(\frac{p}{p_a}\right)^n \quad (4)$$

根据压缩系数的定义 $C_c = -de / d(\ln p)$, 式 (4) 可以转化为

$$-\left(\frac{p}{p_a}\right) \frac{de}{d\left(\frac{p}{p_a}\right)} = \alpha e \left(\frac{p}{p_a}\right)^n \quad (5)$$

当初始孔隙比 e_0 已知时, 对式 (5) 等式左右两部分同时积分, 可得任意应力 p 下对应的孔隙比 e :

$$e = e_0 \exp \left[-\frac{\alpha}{n} \left(\frac{p}{p_a} \right)^n \right] \quad (6)$$

式 (6) 中初始孔隙比 e_0 可以根据颗粒相对密度 G_s 与制样密度换算求得。参数 α 、 n 可以利用试验数据并根据式 (6) 用优化拟合的方法确定。

值得注意的是, 式 (6) 只能对单一初始孔隙比下无黏性土的压缩曲线进行拟合。为了使式 (6) 能对不同初始孔隙比下的无黏性土的压缩曲线进行拟合, 需要建立参数 α 与 e_0 的关系。为此, 对 Lee 等^[6] 进行的不同初始孔隙比的 Sacramento River 砂等向固结试验数据进行整理, 并使用式 (6) 进行优化拟合。由试验数据确定的不同初始孔隙比下的参数列于表 1。

表 1 Sacramento River 砂不同初始孔隙比下的参数
Table 1 Compression parameters of Sacramento River sand with different void ratios

e_0	α	n
0.870	3.53×10^{-3}	0.941
0.780	2.45×10^{-3}	0.983
0.710	2.57×10^{-3}	0.933
0.610	2.69×10^{-3}	0.829

从表 1 可以看出, 由等向固结试验确定的参数 n 并不是一个定值, 但其变化范围较小, 因此对 n 取平均值 0.921 后 (在下文整理其他砂土的试验数据时发现参数 n 变化范围较小, 因此下文 n 的取值均遵循此原则), 整理得到的 α 值与初始孔隙比 e_0 的关系如图 3 所示。从图中可以看出, 参数 α 和初始孔隙比 e_0 的关系可用直线拟合。

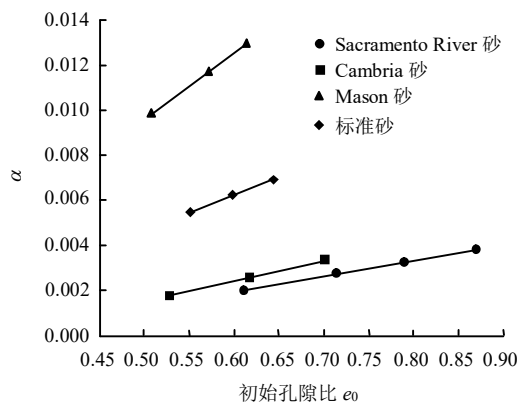


图 3 不同无黏性土 α - e_0 关系曲线
Fig.3 Relationship curves between α and e_0 of different cohesionless soils

为验证参数 α 和初始孔隙比 e_0 的线性关系对

不同无黏性土的适用性,按上述方法整理了 Cambria 砂^[12]、标准砂^[15]和 Mason 砂^[18]的参数 α 和初始孔隙比 e_0 的关系,如图 3 所示。由于本文的压缩模型重点是描述低球应力下无黏性土的压缩特性,因此 Cambria 砂和 Mason 砂只取 $p < 20$ MPa 的试验数据。从图 3 可以看出,参数 α 和初始孔隙比 e_0 的线性关系对这 3 种无黏性土同样适用。

综合上述分析, α 和 e_0 的关系可以表示为

$$\alpha = k(e_0 - e_r) \quad (7)$$

式中: k 为直线斜率; e_r 与文献^[15]保持一致,称为参考孔隙比。

因此,无黏性土等向压缩条件下的孔隙比 e 和球应力 p 的关系可以表示为

$$e = e_0 \exp \left\{ \frac{-k}{n} (e_0 - e_r) \left(\frac{p}{p_a} \right)^n \right\} \quad (8)$$

式(8)中共有 3 个参数,分别为 k 、 e_r 、 n 。参数可以通过 3 个或 3 个以上的不同初始孔隙比的等向压缩试验确定。

3 压缩模型的验证

本节分别利用 Sacramento River 砂^[6]、标准砂^[15]、Mason 砂^[18]和 Cambria 砂^[12]的等向压缩试验数据对本文提出的模型进行验证。

Lee 等^[6]对 Sacramento River 砂进行了 4 种不同初始孔隙比下的等向固结试验。根据等向压缩试验数据得到的压缩参数 k 、 e_r 、 n 分别为 0.006 9、0.327 和 0.921,整理得到的试验数据和拟合结果如图 4 所示。从图 4 中可以看出,本文提出的压缩方程式(8)能较好拟合 Sacramento River 砂在 $p < 13$ MPa, $e_0 = 0.610 \sim 0.870$ 的压缩特性。

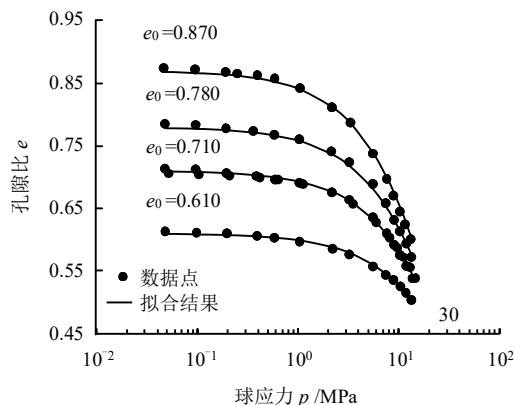


图 4 Sacramento River 砂拟合结果与实测值对比曲线
Fig.4 Fitting results of Sacramento River sand compared with measured data

赵颜辉等^[15]对标准砂进行了初始孔隙比为 0.642、0.598 和 0.554 的等向压缩试验。标准砂砂粒相对密度为 2.654,最大和最小孔隙比分别为 0.803 和 0.511。由于试验最大固结应力只有 1 800 kPa。为方便、直观地比较试验数据和拟合结果,将数据绘于 $e-p$ 空间内,如图 5 所示。根据试验数据确定的压缩参数 k 、 e_r 、 n 分别为 0.016 6、0.223 和 0.483。从图 5 中可以看出,在 $p < 2$ MPa, $e_0 = 0.554 \sim 0.642$ 时,式(8)的拟合程度较好。

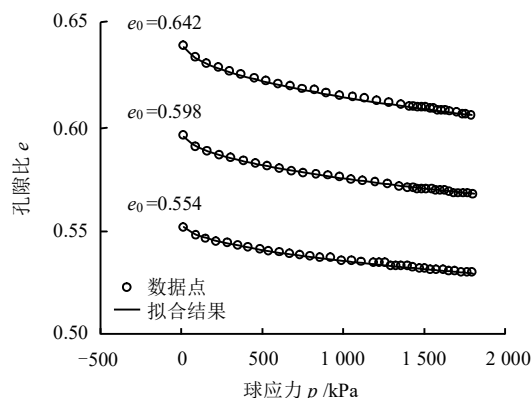


图 5 标准砂拟合结果与实测值对比曲线
Fig.5 Fitting curves of standard sand compared with measured data

文献^[18]对 Mason 砂进行最大球应力为 160 MPa 的等向压缩试验。Mason 砂砂粒相对密度为 2.62,最大和最小孔隙比分别为 0.780 和 0.500,试验的初始孔隙比分别为 0.610、0.570 和 0.510。由于提出压缩方程式(8)的主要目的是描述低球应力下无黏性土的压缩特性,因此只对 $p < 20$ MPa 的试验数据进行了整理,如图 6 所示。根据试验数据确定的压缩参数 k 、 e_r 、 n 分别为 0.029 3、0.173 和 0.619。从图 6 中可以看出,式(8)能较好地拟合 Mason 砂在 $p < 20$ MPa, $e_0 = 0.510 \sim 0.610$ 范围内的压缩特性。

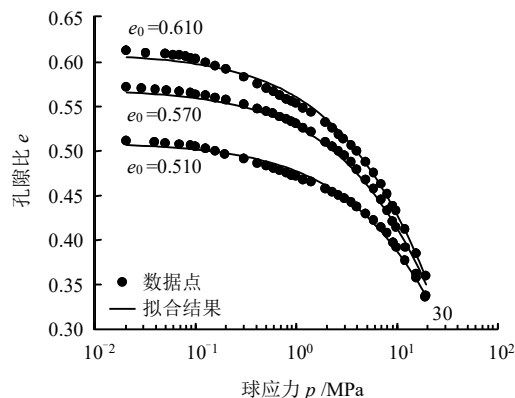


图 6 Mason 砂拟合结果与实测值对比曲线
Fig.6 Fitting curves of Mason sand compared with measured data

为验证式(8)的优越性,这里使用 Cambria 砂^[12]的试验数据与赵颜辉等^[15]提出的模型进行对比。赵颜辉等^[15]提出的模型可以表示为

$$\varepsilon_v = k(e_0 - e_r) \left(\frac{p}{p_a} \right)^\lambda \quad (9)$$

式中: k 和 λ 均为参数; e_r 为参考孔隙比。

这里未与其他模型对比的原因为,如引言部分所述,模型的实用性是本文的目标,第1类压缩模型实用性不强,与本文模型不具有可比性。第2类压缩模型中, Bauer^[13]提出的模型的缺点已在文献^[15]中进行了详细讨论,所以这里也不再与之进行对比。

Lade 等^[12]对 Cambria 砂进行了初始孔隙比为 0.700、0.620 和 0.530 的等向压缩试验。试验用砂为均质砂,砂粒相对密度为 2.90,粒径为 0.83~2.00 mm,最大、最小孔隙比分别为 0.792 和 0.503。与 Mason 砂类似,这里只对 Cambria 砂 $p < 20$ MPa 的试验数据进行了整理。为方便、直观地比较两模型的拟合效果,将试验数据绘于如图 7 所示的 e - p 空间内。由试验数据确定的压缩参数 k 、 e_r 、 n 分别为 0.008 4、0.312 和 0.941,式(8)的计算结果如图 7 中实线所示。图 7 中虚线是根据文献^[15]表 1 中 Cambria 砂的模型参数(式(9))绘制而成。从图 7 中可以看出,除初始孔隙比 0.7 的结果稍差外,式(8)能较好拟合 Cambria 砂在 $p < 20$ MPa、 $e_0 = 0.530 \sim 0.620$ 的实测值。当 $p > 7$ MPa 时,式(8)能更好地拟合 Cambria 砂的试验数据。

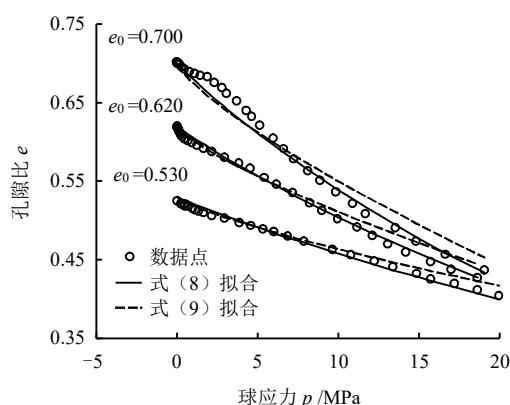


图 7 式(8)及式(9)对 Cambria 砂拟合结果与实测值对比曲线

Fig.7 Fitting curves of Cambria sand obtained from two models of formulae (8) and (9) compared with measured data

4 结 论

本文提出了无黏性土压缩指数的定量表达式,

以此为基础推导得到一个三参数压缩模型,并验证了本文压缩模型的有效性。得出以下结论:

(1) 无黏性土等向压缩曲线的斜率,即压缩指数与当前孔隙比 e 和球应力 p 的幂函数的乘积成正比。

(2) 本文提出的压缩模型共有 3 个参数,可以通过 3 组或以上不同初始孔隙比下的等向压缩试验确定。

(3) 本文的压缩模型并没有以 LCC 作为参考线,所以并不存在收敛极限,但也避免了以 LCC 为参考线建立的压缩模型使用时需要 LCC 段数据,以及要借助数值分析等数学手段获得压缩曲线的限制。对 4 种无黏性土等向压缩试验的拟合结果表明,本文的压缩模性能较好地拟合 20 MPa 下无黏性土的孔隙比-应力关系,可以满足绝大部分工程实际应用的需

参 考 文 献

- [1] YIN J H, GRAHAM J. Elastic viscoplastic modelling of the time-dependent stress-strain behaviour of soils[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1999, 36(4): 736-745.
- [2] 陈生水, 傅中志, 韩华强, 等. 一个考虑颗粒破碎的堆石料弹塑性本构模型[J]. *岩土工程学报*, 2011, 33(10): 1489-1495.
CHEN Sheng-shui, FU Zhong-zhi, HAN Hua-qiang, et al. An elastoplastic model for rockfill materials considering particle breakage[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2011, 33(10): 592-600.
- [3] 王占军, 陈生水, 傅中志. 堆石料流变的黏弹塑性本构模型研究[J]. *岩土工程学报*, 2014, 36(12): 2188-2194.
WANG Zhan-jun, CHEN Sheng-shui, FU Zhong-zhi. Viscoelastic-plastic constitutive model for creep deformation of rockfill materials[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2014, 36(12): 2188-2194.
- [4] 姚仰平, 刘林, 罗汀. 砂土的 UH 模型[J]. *岩土工程学报*, 2016, 38(12): 2147-2153.
YAO Yang-ping, LIU Lin, LUO Ting. UH model for sands[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, 38(12): 2147-2153.
- [5] 罗汀, 刘林, 姚仰平. 考虑颗粒破碎的砂土临界状态特性描述[J]. *岩土工程学报*, 2017, 39(4): 592-600.
LUO Ting, LIU Lin, YAO Yang-ping. Description of critical state for sands considering particle crushing[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2017, 39(4): 592-600.

- [6] LEE K L, SEED H B. Drained strength characteristics of sands[J]. **Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE**, 1967, 93(SM6): 117-141.
- [7] 王远, 张胜, 敖大华, 等. 复杂应力路径下堆石料的颗粒破碎特性研究[J]. **岩土工程学报**, 2018, 40(4): 698-706.
- WANG Yuan, ZHANG Sheng, AO Da-hua, et al. Particle breakage characteristics of rockfills under complex stress paths[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2018, 40(4): 698-706.
- [8] 王蕴嘉, 宋二祥. 堆石料颗粒形状对堆积密度及强度影响的离散元分析[J]. **岩土力学**, 2019, 40(6): 2416-2426.
- WANG Yun-jia, SONG Er-xiang. DEM analysis of particle shape effect on packing density and strength of rockfills[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2019, 40(6): 2416-2426.
- [9] PESTANA J M, WHITTLE A J. Compression model for cohesionless soils[J]. **Géotechnique**, 1995, 45(4): 611-631.
- [10] PEDROSO D M, SHENG D C, ZHAO J D. The concept of reference curves for constitutive modelling in soil mechanics[J]. **Computers and Geotechnics**, 2009, 36(1): 149-165.
- [11] SHENG D C, YAO Y P, CARTER J P. A volume-stress model for sands under isotropic and critical stress states[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2008, 45(11): 1639-1645.
- [12] LADE P V, BOPP P A. Relative density effects on drained sand behavior at high pressures[J]. **Soils and Foundations**, 2005, 45(1): 1-14.
- [13] BAUER E. Calibration of a comprehensive hypoplastic model for granular materials[J]. **Soils and Foundations**, 1996, 36(1): 13-26.
- [14] 郭万里, 朱俊高, 钱彬, 等. 粗粒土的颗粒破碎演化模型及其试验验证[J]. **岩土力学**, 2019, 40(3): 1023-1029.
- GUO Wan-li, ZHU Jun-gao, QIAN Bin, et al. Study on the particle breakage evolution model of coarse-grained soil and its experimental verification[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2019, 40(3): 1023-1029.
- [15] 赵颜辉, 朱俊高, 张宗亮, 等. 无黏性土压缩曲线的一种数学模式[J]. **岩土力学**, 2011, 32(10): 3033-3037.
- ZHAO Yan-hui, ZHU Jun-gao, ZHANG Zong-liang, et al. A compression model for cohesionless soils[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2011, 32(10): 3033-3037.
- [16] BRZESOWSKY R H, SPIERS C J, PEACH C J, et al. Time-independent compaction behavior of quartz sands[J]. **Journal of Geophysical Research: Solid Earth**, 2014, 119(2): 936-956.
- [17] OVALLE C. Role of particle breakage in primary and secondary compression of wet and dry sand[J]. **Géotechnique Letters**, 2018, 8(2): 161-164.
- [18] MUN W, MCCARTNEY J S. Roles of particle breakage and drainage in the isotropic compression of sand to high pressures[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2017, 143(10): 1-14.

上接第 228 页

- [13] ZHANG C, DENG P, KE W. Assessing physical mechanisms related to kinematic soil-pile interaction[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2018, 114: 22-26.
- [14] KE W, LIU Q, ZHANG C. Kinematic bending of single piles in layered soil[J]. **Acta Geotechnica**, 2019, 14(1): 1-10.
- [15] TANAHASHI H. Formulas for an infinitely long Bernoulli-Euler beam on the Pasternak model[J]. **Journal of the Japanese Geotechnical Society**, 2004, 44(5): 109-118.
- [16] VALLABHAN C V G, DAS Y C. Parametric study of beams on elastic foundations[J]. **Journal of Engineering Mechanics, ASCE**, 1988, 114(12): 2072-2082.
- [17] VALLABHAN C V G, DAS Y C. A refined model for beams on elastic foundations[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 1991, 27(5): 629-637.
- [18] 吴为义. 盾构隧道周围地下管线的性状研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2008.
- WU Wei-yi. Study on mechanical behaviors of buried pipelines induced by shield tunneling construction[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2008.
- [19] ZHANG C, DENG P, KE W H. Assessing physical mechanisms related to kinematic soil-pile interaction[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2018; 114: 22-26.
- [20] KE W H, ZHANG C, DENG P. Kinematic response of single piles to vertical P-waves in multilayered soil[J]. **Journal of Earthquake and Tsunami**, 2015, 9(2): 1-19.